Wittgenstein's Writings

Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik I App III

Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik – I App III

Ludwig Wittgenstein

Ts-221a & 246[1] **1.** Man kann sich leicht eine Sprache denken, in der es keine Frage- und keine Befehlsform gibt, sondern in der Frage und Befehl in der Form der Behauptung ausgedrückt wird, in Formen z.B., entsprechend unserem: "Ich möchte wissen, ob ····." und "Ich wünsche, daß ····.". Niemand würde doch von einer Frage (etwa, ob es draußen regnet) sagen, sie sei wahr oder falsch. Es ist freilich deutsch, dies von einem Satz, "ich wünsche zu wissen, ob ····.", zu sagen. Wenn nun aber diese Form immer statt der Frage verwendet wird? –

Ts-221a & 246[2] **2.** Die große Mehrzahl der Sätze, die wir aussprechen, schreiben und lesen, sind Behauptungssätze. Und – sagst Du – diese Sätze sind wahr oder falsch. Oder, wie ich auch sagen könnte, mit ihnen wird das Spiel der Wahrheitsfunktionen [?] gespielt. Denn die Behauptung ist nicht etwas, was zu dem Satz hinzutritt, sondern ein wesentlicher Zug des Spiels, das wir mit ihm spielen. Etwa vergleichbar dem Charakteristikum des Schachspiels, daß es ein Gewinnen und Verlieren dabei gibt, und daß der gewinnt, der dem Andern den König nimmt. Freilich, es könnte ein dem Schach sehr verwandtes Spiel geben, das darin besteht, daß man die Schachzüge macht, aber ohne daß es dabei ein Gewinnen und Verlieren gibt, oder die Bedingungen des Gewinnens sind andere.

Ts-221a & 247[1] **3.** Denke, man sagte: Ein Befehl besteht aus einem Vorschlag ('Annahme') und dem Befehlen des Vorgeschlagenen.

Ts-221a & 247[2] **4.** Könnte man nicht Arithmetik treiben, ohne auf den Gedanken zu kommen, arithmetische *Sätze* auszusprechen, und ohne daß uns die Ähnlichkeit einer Multiplikation mit einem Satz je auffiele? Aber würden wir nicht den Kopf schütteln, wenn Einer uns eine falsch gerechnete Multiplikation zeigte, wie wir es tun, wenn er uns sagt, es regne, wenn es nicht regnet? – Doch; und hier liegt ein Punkt der Anknüpfung. Wir machen aber auch abwehrende Gesten, wenn ein Hund sich nicht benimmt, wie wir es wünschen. Wir sind gewohnt, zu sagen "2 mal 2 ist 4" und das Verbum "ist" macht dies zum Satz und stellt scheinbar eine nahe Verwandtschaft her mit allem, was wir 'Satz' nennen; während es sich nur um eine sehr äußerliche Beziehung handelt.

Ts-221a & 248[1] **5.** Gibt es wahre Sätze in Russell's System, die nicht in seinem System zu beweisen sind? – Was nennt man denn einen wahren Satz in Russell's System?

Ts-221a & 248[2] **6.** Was heißt denn, ein Satz '*ist wahr*'? p *ist wahr* = p. (dies ist die Antwort.) Man will also etwa fragen: unter welchen Umständen behauptet man einen Satz? oder: wie wird die Behauptung des Satzes im Sprachspiel gebraucht? Und die "Behauptung des Satzes" ist hier entgegengesetzt dem Aussprechen des Satzes etwa als Sprachübung, – oder als *Teil* eines andern Satzes, u. dergl.. Fragt man also in diesem Sinne: "Unter welchen Umständen behauptet man in Russell's Spiel einen Satz", so ist die Antwort: Am Ende eines seiner Beweise, oder als 'Grundgesetz' (p.p.). Anders werden in diesem System Behauptungssätze in den Russell'schen Symbolen nicht verwendet.

Ts-221a & 248[3] & 249[1]

7. “Kann es aber nicht wahre Sätze geben, die in diesem Symbolismus angeschrieben sind, aber in dem System Russell’s nicht beweisbar?” – ‘Wahre Sätze’, das sind also Sätze, die in einem *andern* System wahr sind, d.h. in einem andern Spiel mit Recht behauptet werden können. Gewiß; warum soll es keine solchen Sätze geben; oder vielmehr: warum soll man nicht Sätze – der Physik z.B. – in Russell’s Symbolen anschreiben? Die Frage ist ganz analog der: Kann es wahre Sätze in Euklids Sprache geben, die in seinem System nicht beweisbar, aber wahr sind? – Aber es gibt ja sogar Sätze, die in Euklid’s System beweisbar, aber in einem andern System *falsch* sind. Können nicht Dreiecke – in einem andern System – ähnlich (*sehr* ähnlich) sein, die nicht gleiche Winkel haben? – “Aber das ist doch ein Witz! sie sind ja dann nicht im selben Sinne einander ‘ähnlich’!” – Freilich; und ein Satz, der nicht in Russell’s System zu beweisen ist, ist im andern Sinne “wahr” oder “falsch”, als ein Satz der ‘Principia Mathematica’.

Ts-221a & 249[2] & 250[1]

8. Ich stelle mir vor, es fragte mich Einer um Rat; er sagt: “Ich habe einen Satz (ich will ihn mit “P” bezeichnen) in Russell’s Symbolen konstruiert, und den kann man durch gewisse Definitionen und Transformationen so deuten, daß er sagt: ‘P ist nicht in Russell’s System beweisbar’. Muß ich nun von diesem Satz nicht sagen: einerseits er sei wahr, anderseits er sei unbeweisbar? Denn angenommen, er wäre falsch, so ist es also wahr, daß er beweisbar ist! Und das kann doch nicht sein. Und ist er bewiesen, so ist bewiesen, daß er nicht beweisbar ist! So kann er also nur wahr, aber unbeweisbar sein.” So wie wir fragen: “in welchem System ‘beweisbar’?”, so müssen wir auch fragen: “in welchem System ‘wahr’?”. ‘In Russell’s System wahr’ heißt, wie gesagt: in Russell’s System bewiesen; und ‘in Russell’s System falsch’ heißt: das Gegenteil sei in Russell’s System bewiesen. – Was heißt nun Dein: “angenommen, er sei falsch”? *In Russell’s Sinne* heißt es: “angenommen das Gegenteil sei in Russell’s System bewiesen”; *ist das Deine Annahme*, so wirst Du jetzt die Deutung, er sei unbeweisbar, wohl aufgeben. Und unter dieser Deutung verstehe ich die Übersetzung in diesem deutschen Satz. – Nimmst Du an, der Satz sei in Russell’s System beweisbar, so ist er damit *in Russell’s Sinne* wahr und die Deutung “P ist nicht beweisbar” ist wieder aufzugeben. Nimmst Du an, der Satz sei in Russell’s Sinne wahr, so folgt das *Gleiche*. Ferner: soll der Satz in einem andern als Russell’s Sinne falsch sein: so widerspricht dem nicht, daß er in Russell’s System bewiesen ist. (Was im Schach “verlieren” heißt, kann doch in einem andern Spiel das Gewinnen ausmachen.)

Ts-221a & 250[2]

9. Was heißt es denn: "P" und "P ist unbeweisbar" seien der gleiche Satz? Es heißt, daß diese *zwei* deutschen Sätze in der und der Notation *einen* Ausdruck haben.

Ts-221a & 250[3] & 251[1]

10. "Aber P kann doch nicht beweisbar sein, denn, angenommen es wäre bewiesen, so wäre der Satz bewiesen, er sei nicht beweisbar." Aber wenn dies nun bewiesen wäre, oder wenn ich glaubte – vielleicht durch Irrtum – ich hätte es bewiesen, warum sollte ich den Beweis nicht gelten lassen und sagen, ich müsse meine Deutung "*unbeweisbar*" zurückziehen?

Ts-221a & 251[2]

11. Nehmen wir an, ich beweise die Unbeweisbarkeit (in Russell's System) von P; so habe ich mit diesem Beweis P bewiesen. Wenn nun dieser Beweis einer in Russell's System wäre, – dann hätte ich also zu gleicher Zeit seine Zugehörigkeit und Unzugehörigkeit zum Russell'schen System bewiesen. – Das kommt davon, wenn man solche Sätze bildet. – Aber hier ist ja ein Widerspruch! – Nun so ist hier ein Widerspruch. Schadet er hier etwas?

Ts-221a & 251[3]

12. Schadet der Widerspruch, der entsteht wenn Einer sagt: "Ich lüge. – Also lüge ich nicht. – Also lüge ich. Etc." Ich meine: ist unsere Sprache dadurch weniger brauchbar, daß man in diesem Fall aus einem Satz nach den gewöhnlichen Regeln sein Gegenteil und daraus wieder ihn folgern kann? – der Satz *selbst* ist unbrauchbar, und ebenso dieses Schlüsseziehen; aber warum soll man es nicht tun? – Es ist eine brotlose Kunst! – Es ist ein Sprachspiel, das Ähnlichkeit mit dem Spiel des Daumenfangens hat.

Ts-221a & 252[1]

13. Interesse erhält so ein Widerspruch nur dadurch, daß er Menschen gequält hat und dadurch zeigt, wie aus der Sprache quälende Probleme wachsen können; und was für Dinge uns quälen können.

Ts-223 & 252[2]

14. Ein Beweis der Unbeweisbarkeit ist quasi ein geometrischer Beweis; ein Beweis, die Geometrie der Beweise betreffend. Ganz analog einem Beweise etwa, daß die und die Konstruktion nicht mit Zirkel und Lineal ausführbar ist. Nun enthält so ein Beweis ein Element der Vorhersage, ein physikalisches Element. Denn als Folge dieses Beweises sagen wir ja einem Menschen: "Bemüh' Dich nicht, eine Konstruktion (der Dreiteilung des Winkels, etwa) zu finden, – man kann beweisen, daß es nicht geht." Das heißt: es ist wesentlich, daß sich der Beweis der Unbeweisbarkeit in dieser Weise soll anwenden lassen. Er muß – könnte man sagen – für uns ein *triftiger Grund* sein, die Suche nach einem Beweis (also einer Konstruktion der und der Art) aufzugeben. Ein Widerspruch ist als eine solche Vorhersage unbrauchbar.

Ts-223 & 252[3] & 253[1]

16. Ob etwas mit Recht der Satz genannt wird "X ist unbeweisbar", hängt davon ab, wie wir diesen Satz beweisen. Nur der Beweis zeigt, was als das Kriterium der Unbeweisbarkeit gilt. Der Beweis ist ein Teil des Systems von Operationen, des Spiels, worin der Satz gebraucht wird, und zeigt uns seinen 'Sinn'. Es ist also die Frage ob der "Beweis der Unbeweisbarkeit' von p hier ein triftiger Grund ist zur Annahme daß ein Beweis von p nicht gefunden werden wird. Der Satz "p ist unbeweisbar" hat einen andern Sinn, nach dem – als ehe er bewiesen ist. Ist er bewiesen, so ist er die Schlußfigur des Unbeweisbarkeitsbeweises. – Ist er unbewiesen, so ist ja noch nicht *klar*, *was* als Kriterium seiner Wahrheit zu gelten hat, und sein Sinn ist – kann man sagen – noch verschleiert.

Ts-221a & 253[2] & 254[1]

17. Wie, soll ich nun annehmen, ist P bewiesen? Durch einen Unbeweisbarkeitsbeweis? oder auf eine andere Weise? Nimm an, durch einen Unbeweisbarkeitsbeweis. Nun, um zu sehen, *was* bewiesen ist, schau auf den Beweis! Vielleicht ist hier bewiesen, daß die und die Form des Beweises nicht zu P führt. – Oder, es sei P auf eine direkte Art bewiesen – wie ich einmal sagen will –, dann folgt also der Satz "P ist unbeweisbar", und es muß sich nun zeigen, wie diese Deutung der Symbole von P mit der Tatsache des Beweises kollidiert und warum sie hier aufzugeben sei. Angenommen aber, ~ P sei bewiesen. – *Wie* bewiesen? Etwa dadurch, daß P direkt bewiesen ist – denn daraus folgt, daß es beweisbar ist, also ~ P. Was soll ich nun aussagen: "P", oder "~ P"? Warum nicht beides? Wenn mich jemand fragt: "Was ist der Fall – P, oder nicht-P?", so antworte ich: "⊢ P" steht am Ende eines Russell'schen Beweises, Du schreibst also im Russell'schen System: " ⊢ P"; anderseits ist es aber eben beweisbar und dies drückt man durch " ⊢ ~ P" aus, dieser Satz aber steht nicht am Ende eines Russell'schen Beweises, gehört also nicht zum Russell'schen System. – Als die Deutung "P ist unbeweisbar" für P gegeben wurde, da kannte man ja diesen Beweis für P nicht und man kann also nicht sagen "P" sage: *dieser* Beweis existierte nicht. – Ist der Beweis hergestellt, so ist damit eine *neue Lage* geschaffen: Und wir haben nun zu entscheiden, ob wir *dies* einen Beweis (*noch* einen Beweis), oder ob wir *dies* noch die Aussage der Unbeweisbarkeit nennen wollen. Angenommen ~ P sei direkt bewiesen; es ist also bewiesen, daß sich P direkt beweisen läßt! Das ist also wieder eine Frage der Deutung – es sei denn, daß wir nun auch einen direkten Beweis von P haben. Wäre es nun so, nun, so wäre es so. – (Die abergläubische Angst und Verehrung der Mathematiker vor dem Widerspruch.)

Ts-221a & 254[2] **18.** "Aber angenommen, der Satz wäre nun *falsch* – und daher beweisbar! –" Warum nennst Du ihn 'falsch'? Weil Du einen Beweis siehst? – Oder aus andern Gründen? Dann macht es ja nichts. Man kann ja den Satz des Widerspruchs sehr wohl falsch nennen, mit der Begründung z.B., daß wir sehr oft mit gutem Sinn auf eine Frage antworten: "Ja, und nein." Und ebenso den Satz "p ≡ p": weil wir die Verdoppelung der Verneinung als eine *Verstärkung* der Verneinung verwenden und nicht bloß als ihre Aufhebung.

Ts-221a & 255[1] **19.** Du sagst: "····." also ist P wahr und unbeweisbar." Das heißt wohl: "Also ⊢ P." Von mir aus – aber zu welchem Zweck schreibst Du diese 'Behauptung' hin? (Das ist, als hätte jemand aus gewissen Prinzipien über Naturformen und Baustil abgeleitet, auf den Mount Everest, wo niemand wohnen kann, gehöre ein Schlößchen im Barockstile.) Und wie könntest Du mir die Wahrheit der Behauptung plausibel machen, da Du sie ja zu nichts weiter brauchen kannst als zu jenen Kunststückchen?

Ts-221a & 255[2]

20. Man muß sich hier daran erinnern, daß die Sätze der Logik so konstruiert sind, daß sie als *Information keine* Anwendung in der Praxis haben. Man könnte also sehr wohl sagen, sie seien garnicht *Sätze*; und daß man sie überhaupt hinschreibt, bedarf einer Rechtfertigung. Fügt man diesen 'Sätzen' nun ein weiteres satzartiges Gebilde andrer Art hinzu, so sind wir hier schon erst recht im Dunkeln darüber, was dieses System von Zeichenkombinationen nun für eine Anwendung, für einen Sinn haben soll, denn der bloße *Satzklang* dieser Zeichenverbindungen gibt ihnen ja eine Bedeutung noch nicht.